IA : TAMBA
Lycée : Koumpentoum
Année : 2020-2021

Prof : M. DRAME
Classe : $1^{ere}S_2$
Chapitre : Trigonométrie

SERIE D'EXERCICES

EXERCICE 1

1. Exprimer en fonction de cosx et de sinx l'expression suivante

$A(x) = \sin(\frac{7\Pi}{2} + x) + \sin(x - \frac{3\Pi}{2}) + 2\sin(3\Pi - x) + 4\cos(x + \frac{5\Pi}{2})$

2. Démontrer que pour tout nombre réel α
   $\cos\alpha + \cos(\alpha + \frac{2\Pi}{3}) + \sin(\alpha + \frac{4\Pi}{3}) = 0$
3. On considère un nombre réel α tel que
   $\frac{\Pi}{2} \prec \alpha \prec \Pi$ et $\cos(\frac{\Pi}{2} - \alpha) = \frac{2}{3}$
   Calculer $\cos\alpha$; $\cos 2\alpha$; $\tan\alpha$ et $\tan 2\alpha$.

EXERCICE 2

On donne $\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

1. Montrer que $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.
2. Calculer les valeurs exactes de :

$\sin\frac{4\pi}{5}$, $\cos\frac{4\pi}{5}$ $\sin\frac{3\pi}{10}$, $\cos\frac{3\pi}{10}$, $\sin\frac{6\pi}{5}$ et $\cos\frac{6\pi}{5}$.

EXERCICE 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$[E_1] : \sin(3x + \frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{2\pi}{3} - x)$

$[E_2] : \sin(3x) = \cos(x - \frac{\pi}{6})$

$[E_3] : \cos(-x + \frac{\pi}{3}) + \cos(3x) = 0$

$[E_4] : \tan(3x) = \frac{1}{\tan x}$

EXERCICE 4

Résoudre dans IR les équations suivantes et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

1. $[E1]$: $\cos(3x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
2. $[E2]$: $\sin(3x) + \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$
3. $[E3] : \cos x - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin x + \frac{\sqrt{6}}{3} = 0$

EXERCICE 5

Résoudre dans $[0 ; 2\Pi]$ les équations suivantes :

a. $\cos 4x \cos x + \sin 4x \sin x = \cos\frac{\Pi}{12}$
b. $\sin 2x - 2\sin x \cos 5x = 0$
c. $\sin 2x = \cos^2 x$
d. $2\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$
e. Calculer les valeurs exactes de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ avec $\tan\alpha = \frac{-4}{3}$ et $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$.

EXERCICE 6

Résoudre dans D

1. $(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2})(2\sin x - 1) < 0$ D$=[0, 2\pi[$
2. $4\cos^2 x + 2(\sqrt{2} - 1)\cos x - \sqrt{2} \leq 0$ D$=[0, 2\pi[$
3. $2\cos 2x - 1 > 0$ D$=[0, 2\pi[$
4. $\begin{cases} \sin x \leq \frac{1}{2} \\ 2\sin x + 1 \geq 0 \end{cases}$ D$=]-\pi, \pi]$
5. $|\sin x| \geq \frac{1}{2}$ D$=]-\pi, \pi]$

EXERCICE 7

Soit P le polynôme défini par $P(x) = 4x^3 - 2(3 + \sqrt{3})x^2 + (2 + 3\sqrt{3})x - \sqrt{3}$

1. Montrer que $P(x) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1)\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
2. Résoudre dans IR $P(x) = 0$; $P(x) \geq 0$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$
   $4\cos^3 x - 2(3 + \sqrt{3})\cos^2 x + (2 + 3\sqrt{3})\cos - \sqrt{3} = 0$
4. Résoudre dans $[0, 2\pi[$
   $4\cos^3 x - 2(3 + \sqrt{3})\cos^2 x + (2 + 3\sqrt{3})\cos x - \sqrt{3} \leq 0$

EXERCICE 8

A- 1- Ecrire cos(3x) en fonction de cosx et sin(3x) en fonction de sinx.

2- En déduire que $\tan(3x) = \tan x \times \frac{3 - \tan^2 x}{1 - 3\tan^2 x}$

B- Calculer sin(2x) et cos(2x) dans chacun des cas suivants :

1- $\sin x = \frac{1}{3}$ et $x \in [0, \pi]$.

2- $\cos x = \frac{-3}{5}$ et $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

EXERCICE 9

Résoudre dans $[0, \pi]$ le système suivant

$$\begin{cases} \sin x \cos x \geq \frac{1}{4} \\ \sin x \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

EXERCICE 10

1. Résoudre dans IR puis dans $]-\pi, \pi]$ $(E): \sin 3x = -\sin 2x$
2. Démontrer que $\sin 3x = \sin x(4\cos^2 x - 1)$
3. En déduire que l'équation (E) est équivalente à $\sin x(4\cos^2 x + 2\cos x - 1) = 0$
4. Parmi les solutions trouvées pour (E) lesquelles sont aussi solutions de l'équation $4\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$
5. On pose $X = \cos x$ $Résoudre 4X^2 + 2X - 1 = 0$ en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

EXERCICE 11

1. Montrer que $sin^4(x) - cos^4(x) + 2cos^2(x) = 1$.
2. a) Démontrer que $\cos^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3)$.

   B) Démontrer que $\sin^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x - 4\cos 2x + 3)$.

   c) Calculer $\cos^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \cos^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8}$.

EXERCICE 12

A) Déterminer les valeurs exactes des nombres E et B suivants

$$E = \sin\frac{7\pi}{4} + \cos\frac{17\pi}{3} + \sin(-\frac{81\pi}{2})$$

$$F = \tan(-\frac{5\pi}{6}) + 2\tan(-25\pi) + \tan\frac{4\pi}{3}$$

B) Sachant que $\frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{\pi}{12}$, calculer $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

C) On pose $A = \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8}$

et

$$B = \sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \sin^2\frac{7\pi}{8}$$

Calculer A + B et A – B, en déduire A et B.

EXERCICE 13

Soit ABC un triangle non rectangle.

1. Montrer que $\tan(\pi - \hat{A}) = \tan\hat{A}$.
2. Démontrer que : $\tan(\hat{A} + \hat{B}) = -\tan\hat{C}$ et $\tan(\hat{A} + \hat{B}) = \frac{\tan\hat{A} + \tan\hat{B}}{1 - \tan\hat{A}\tan\hat{B}}$.
3. Montrer que $\tan\hat{A} + \tan\hat{B} + \tan\hat{C} = \tan\hat{A}\tan\hat{B}\tan\hat{C}$.
4. Soit ABC un triangle on pose α = ABC β =BCA δ = BAC

a. Montrer que :

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\delta = 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$$

b. En déduire que :

c. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\delta = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\delta}{2}$

EXERCICE 14

1. Montrer que $A = 3$

avec $A = cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + cos^2\left(\frac{2\pi}{8}\right) + cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + cos^2\left(\frac{4\pi}{8}\right) + cos^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + cos^2\left(\frac{6\pi}{8}\right) + cos^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$.

2. Calculer $C = cos^4\left(\frac{\pi}{8}\right) + cos^4\left(\frac{3\pi}{8}\right) + cos^4\left(\frac{5\pi}{8}\right) + cos^4\left(\frac{7\pi}{8}\right)$.

EXERCICE 15

Soit ABCD un pentagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique ; en utilisant la relation $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$ montrer que

a. $1 + 2(\cos\frac{2\Pi}{5} + \cos\frac{4\Pi}{5}) = 0$

b. $1 + 4\cos\frac{2\Pi}{5}\cos\frac{4\Pi}{5} = 0$

En déduire $\cos\frac{2\Pi}{5}$ et $\cos\frac{4\Pi}{5}$

Courage pour toujours

- Il est dur d'échouer ; mais il est pire de ne jamais tenté de réussir. F.D. ROOSEVELT
- Les personnes riches apprennent et grandissent sans cesse. Les personnes pauvres croient qu'ils savent tout. T. HARVEKER
- Ce n'est pas parce que les choses sont difficiles que nous n'osons pas, c'est parce que nous n'osons pas qu'elles sont difficiles. SENEQUE
- La folie, c'est de faire toujours la même chose et de s'attendre à un résultat diffèrent. ALBERT EINSTEIN
- L'énergie est contagieuse. Si tu veux voler avec les aigles, tu devras arrêter de nager avec les canards. T. HARVEKER
- Pour avoir quelque chose que tu n'as jamais eu. Tu dois faire quelque chose que tu n'as jamais fait.